Classification des solutions algébriquement différentielles des équations de Schröder, Böttcher et Abel

Gwladys Fernandes

13/03/2020

Soit $R(z) \in \mathbb{C}(z)$. Les équations de Schröder, Böttcher et Abel sont des équations de formes respectives suivantes, en une fonction inconnue f.

1. $f(\lambda z) = R(f(z))$, où $\lambda \in \mathbb{C}$,
2. $f(z^p) = R(f(z))$, où $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$,
3. $f(R(z)) = f(z) + 1$.

Un théorème de P.-G. Becker et W. Bergweiler produit la liste exhaustive des fonctions différentiellement algébriques parmi les solutions des équations 1,2 et 3 [2]. Le but de cet exposé est d'en expliquer la démonstration. Celle-ci se base sur quatre points essentiels.

Le premier est un théorème de J. F. Ritt [4] qui fournit la liste exhaustive des fonctions différentiellement algébriques solutions des équations de Schröder, dans le cas où $R(z)$ a un point fixe répulsif.

Le deuxième consiste en un résultat de M. Boshernitzan et L. A. Rubel qui établit l'équivalence entre le fait qu'une solution d'une équation de type 1,2 ou 3 soit différentiellement algébrique et le fait que la famille $\{R^n\}_n$ des itérées de R soit cohérente [3]. Cela signifie que toutes les fonctions R^n satisfont à une même équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$.

Le troisième ingrédient est un précédent théorème de P.-G. Becker et W. Bergweiler qui fournit la liste exhaustive des fonctions algébriques solutions des équations de Böttcher [1].

Enfin, le dernier élément consiste en la théorie des ensembles de Fatou et de Julia. En effet, partant d'une équation du type 1,2 ou 3, celle-ci permet d'affirmer l'existence d'un itéré R^k de R qui possède un point fixe répulsif et d'exploiter le théorème de J. F. Ritt précédemment cité.

Références

[1] P.-G. Becker and W. Bergweiler – « Transcendency of local conjugacies in complex dynamics and transcendency of their values », *Manuscripta Math.* **81** (1993), no. 3-4, 329–337.

[2] — , « Hypertranscendency of conjugacies in complex dynamics », *Math. Ann.* **301** (1995), no. 3, 463–468.

[3] M. Boshernitzan and L. A. Rubel – « Coherent families of polynomials », *Analysis* **6** (1986), no. 4, 339–389.

[4] J. F. Ritt – « Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré », *Math. Ann.* **95** (1926), no. 1, 671–682.